تمرين5: لتكن العلاقة الثنائية R المعرفة في مجموعة الأعداد الحقيقية IR كما يلي:

$$x, y \in IR:\ xRy \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y.$$

1. اثبت أن R علاقة تكافؤ.
2. عين $\dot{0}$ صف تكافؤ 0.
3. ليكن a عنصرا كيفيا من IR. عين $\dot{a}$ صف تكافؤ a.
4. حدد عدد عناصر كل صف، عين مجموعة حاصل القسمة $\frac{IR}{R}$، هل هي منتهية؟
5. بدل المجموعة IR نأخذ IN مجموعة الأعداد الطبيعية. عالج نفس الأسئلة السابقة ولاحظ إن كان هناك اختلاف مع ما سبق.

الحل: السؤال 1. متروك للدارس.

2. لدينا تعريفا: $\dot{0} = \{x \in IR : xR0\}$،

ليكن $x \in \dot{0}$. إذن $x^2 - x = 0$ أي $x(x-1) = 0$ وبالتالي $x = 0 \vee x = 1$ ومنه $\dot{0} \subset \{0,1\}$. وبما أن $1R0$ محققة نستنتج أن $\dot{0} = \{0,1\}$.

3. مثلما سبق لدينا $\dot{a} = \{x \in IR : xRa\}$.

ليكن $x \in \dot{a}$. إذن $x^2 - x = a^2 - a$ أي $x^2 - x - a^2 + a = 0$ وهذه معادلة من الدرجة الثانية، المجهول فيها هو x و a مثبت معطى. لتعيين x نحسب المميز Δ:

$$\Delta = 1 + 4(a^2 - a) = 4a^2 - 4a + 1 = (2a-1)^2$$

نلاحظ أن $\Delta \geq 0$ لذلك حلول المعادلة هي $x_1 = \frac{1+(2a-1)}{2} = a, \quad x_2 = \frac{1-(2a-1)}{2} = -a+1$

وبالتالي $\dot{a} \subset \{x_1, x_2\}$ وبما أن x_1Ra و x_2Ra نستنتج أن $x_1 \in \dot{a}$ و $x_2 \in \dot{a}$ أي $\{x_1, x_2\} \subset \dot{a}$ ومنه $\dot{a} = \{x_1, x_2\} = \{a, -a+1\}$.

4. بما أن $\dot{a}$ فيه على الأكثر عنصران، إذن لما $-a+1 = a$ أي $a = \frac{1}{2}$ فإن $\dot{a} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

مجموعة حاصل القسمة $\frac{IR}{R} = \{\dot{x} : x \in IR\} = \{\{a, -a+1\} : a \in IR\}$ أي هي كل أجزاء IR التي تشتمل على a و $-a+1$ مع a كيفي من IR. بعبارة أخرى، $\frac{IR}{R}$ هي كل أجزاء IR ذات العنصرين a و $-a+1$ حيث a كيفي من IR مع $a \neq \frac{1}{2}$ والجزء $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ (أحادي العنصر).

بما أن a يأخذ عددا غير منته من القيم فإن مجموعة حاصل القسمة غير منتهية.

5. الاختلاف يكون على مستوى عدد عناصر صفوف التكافؤ: صف وحيد به عنصران وعدد غير منته من الصفوف أحادية العنصر.

تمرين6: لتكن A, B, C, D أربع مجموعات غير خالية وثلاثة تطبيقات
$f : A \to B,\ g : B \to C,\ h : C \to D$
اثبت أنه إذا كان $g \circ f$ و $h \circ g$ تقابلين فإن $f,\ g,\ h$ تقابلية.

الحل: أولاً نشير إلى أنه لدينا $g \circ f : A \to C$ و $h \circ g : B \to D$.
نثبت أن التطبيق f تقابل.
التباين: ليكن $x, x' \in A$ بحيث $f(x) = f(x')$.
لأن g تطبيق
$$f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x'))$$
$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$$
لأن التطبيق $g \circ f$ متباين
$$\Rightarrow x = x'$$
ومنه التطبيق f متباين.
الغمر: ليكن $z \in B$. إذن $g(z) \in C$؛ لكون التطبيق $g \circ f$ غامرا فإن $\exists x \in A : (g \circ f)(x) = g(z)$
أي أن $g(z) = g(f(x))$ ومن كون h تطبيقا فإنه ينتج لدينا $h(g(z)) = h(g(f(x)))$
أي $(h \circ g)(z) = (h \circ g)(f(x))$.
ومن جديد لكون التطبيق $h \circ g$ متباينا فإنه يصبح لدينا $z = f(x)$، وهو ما يعني بالضبط أن التطبيق f غامر، إذن فهو تقابل.
و بنفس الطريقة يتم إثبات أن التطبيقين g و h تقابليان.

تمرين7: من بين التطبيقات التالية، عين تلك الغامرة، المتباينة، ثم استنتج تلك المتقابلة:

$$f : IR \longrightarrow IR,\quad x \mapsto \sin x \quad ،\quad g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow IR,\quad x \mapsto \sin x \quad ،\quad h : IR \longrightarrow [-1,1],\quad x \mapsto \sin x \quad ،\quad k : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1],\quad x \mapsto \sin x$$

الحل:
– التطبيق f ليس غامرًا، ذلك لأنه مثلا:
من أجل $y = 3 \in IR$ ، لا يوجد أي $x \in IR$ بحيث: $3 = y = f(x) = \sin x$ و هذا طبعا لكون:
$$\forall \alpha \in IR; \left| \sin \alpha \right| \le 1$$
– التطبيق f ليس متباينًا، ذلك لأنه مثلا:
من أجل $\pi, 2\pi \in IR$ لدينا: $f(\pi) = f(2\pi) = 0$ و لكن $\pi \ne 2\pi$.
– التطبيق g ليس غامرًا، ذلك لأنه مثلا:
من أجل $y = 2 \in IR$ ، لا يوجد أي $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ بحيث: $2 = y = g(x) = \sin x$ و هذا طبعا لكون:

$$\forall \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right];|\sin\alpha|\le 1$$

– التطبيق g متباين، ذلك لأن: $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[;\ g'(x)=\cos x>0$ (g' مشتق g).

و $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1\ne g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$، أي أن التطبيق g متزايد تماما.

– التطبيق h غامر، ذلك لأن: $\forall y\in[-1,1]\ \exists x\in IR:\ h(x)=\sin x=y$

و هذا طبعا لكون: $\forall \alpha\in IR;|\sin\alpha|\le 1$

– التطبيق h ليس متباينا، ذلك لأنه مثلا:

من أجل $\pi\,,2\pi\in IR$ لدينا: $h(\pi)=h(2\pi)=0$ و لكن $\pi\ne 2\pi$.

– التطبيق k متباين، ذلك لأن: $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[;\ k'(x)=\cos x>0$ (k' مشتق k).

و $k\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1\ne k\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$، أي أن التطبيق k متزايد تماما.

– التطبيق k غامر، ذلك لأن: $\forall y\in[-1,1]\exists x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]:k(x)=\sin x=y$.

الخلاصة: التطبيقات المتباينة هي: g,k.

التطبيقات الغامرة هي: h,k.

التطبيقات المتقابلة هي: k.

تمرين8: لتكن A,B,C ثلاث مجموعات غير خالية و f,g تطبيقين بحيث:

$f:A\to B$ و $g:B\to C$.

أثبت أنه:

1. إذا كان f و g غامرين فإن $g\circ f$ غامر.
2. إذا كان f و g متباينين فإن $g\circ f$ متباين.

الحل: لدينا: $g\circ f:A\to C$.

1. ليكن $z\in C$، عندئذ لكون التطبيق g غامرًا فإنه $\exists\, y\in B:\ z=g(y)$

وبما أن $y\in B$ و لكون التطبيق f غامرًا فإنه $\exists\, x\in A:\ y=f(x)$

إذن ينتج لدينا $\exists\, x\in A: z=g(f(x))=(g\circ f)(x)$، وهو ما معناه أن التطبيق $g\circ f$ غامر.

2. ليكن $x,x'\in A$، بحيث $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(x')$، إذن $g(f(x))=g(f(x'))$

عندئذ لكون التطبيق g متباينًا فإن $f(x)=f(x')$

ولكن التطبيق f متباين أيضا، إذن $x=x'$، و هذا يعني أن التطبيق $g\circ f$ متباين.